

CIRCUITOS DC Y AC

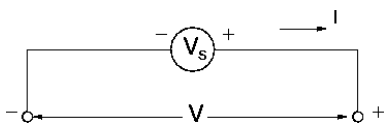
1. Fuentes de tensión y corriente ideales.-

Una fuente ideal de voltaje se define como un generador de voltaje cuya salida $V=V_s$ es independiente de la corriente suministrada. El voltaje de salida suele especificarse como función del tiempo:

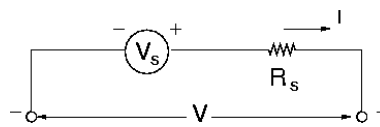
- ◆ $V_s(t) = V_{max} \cos(\omega t)$ (corriente alterna)
- ◆ $V_s(t) = V_0$ (corriente continua)

El convenio de signos implica que 1 C de carga positiva moviéndose desde el polo negativo al positivo a través de la fuente adquiere V_s Julios de energía.

Esquemáticamente:

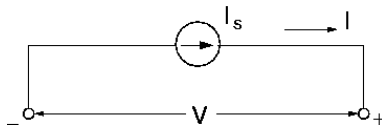


Fuente ideal de voltaje

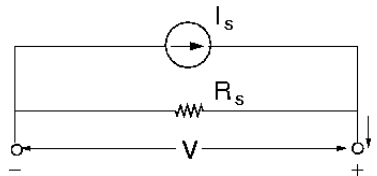


Fuente real de voltaje

Del mismo modo, una fuente ideal de corriente proporciona una corriente $I=I_s$ independientemente del voltaje existente entre los terminales de salida. Según el convenio de signos, la flecha indica la dirección de paso de I_s C de carga positiva por segundo.



Fuente ideal de corriente



Fuente real de corriente

En las fuentes reales, ya sean de voltaje o corriente, siempre se disipa una cierta cantidad de energía en forma de calor.

2. Leyes de Kirchhoff.-

Al cerrar un circuito mediante un elemento conductor, la existencia de un campo eléctrico (\Rightarrow de una diferencia de potencial eléctrico creada por una o varias fuentes de voltaje) hace que las cargas se pongan en movimiento, dando lugar a una corriente. El campo eléctrico se propaga a la velocidad de la luz, de modo que pueden despreciarse efectos transitorios. En cambio, las corrientes NO se propagan a la velocidad de la luz, ya que requieren del desplazamiento de las cargas a través de un medio. (\Rightarrow [itransitorios!](#))

En cualquier circuito que se encuentre en su estado estacionario (\Rightarrow equilibrio energético), se cumplen las siguientes leyes de Kirchhoff:

- i) la suma de todas las diferencias de potencial a lo largo de una malla (circuito cerrado) debe ser cero (**iConservación de la energía!**)

$$\sum_i V_i = 0.$$

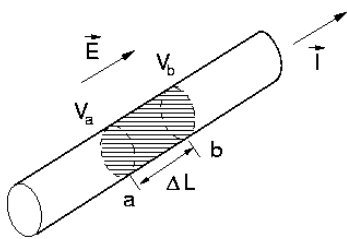
- ii) en un nudo de ramificación de un circuito, la suma de las corrientes que entran y las que salen deben ser cero (**iConservación de la carga!**)

$$\sum_i I_i = 0.$$

Mediante la aplicación de estas leyes, es posible resolver cualquier circuito (\Rightarrow determinar las corrientes y diferencias de potencial en cualquier elemento).

3. Ley de Ohm.-

En el caso electrostático hemos visto que, en equilibrio, el campo eléctrico en el interior de un conductor debe ser cero. Esto no se cumple mientras las cargas están en movimiento: las corrientes se deben a la existencia de un campo interno que produce una fuerza en la dirección de avance de la corriente.



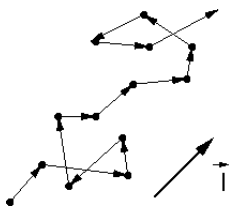
$$\Delta V = V_b - V_a = -E \cdot \Delta L$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{I} \parallel \vec{E} \Rightarrow |\vec{I}| \propto |\vec{E}| = \frac{\Delta V}{\Delta L}$$

$$I \propto \Delta V \rightarrow I = \left(\frac{1}{R}\right) V \quad : \text{ley de Ohm.}$$

R es un parámetro que representa la resistencia que opone el conductor al paso de la corriente; a nivel atómico, se debe a las colisiones que sufren las cargas durante el arrastre.



$$\text{Unidades: } 1 \Omega \equiv \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}}$$

$$1 \text{ A} \equiv \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ s}}$$

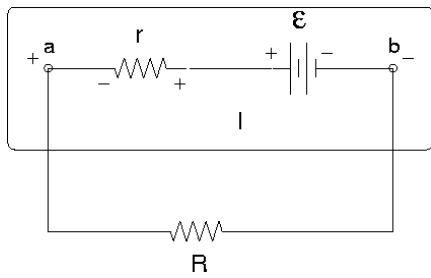
Cuando R tiene un valor constante, el material se denomina "óhmico" (por ejemplo, los metales). En general:

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad , \quad \rho \equiv \text{resistividad}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \frac{L}{A} \quad , \quad \sigma \equiv \text{conductividad}$$

Normalmente, ρ depende de la temperatura a la que se encuentre el material, ya que refleja procesos de dispersión dinámicos (por ejemplo, interacciones con las vibraciones de la red). En los materiales semiconductores, las cargas no están libres y la conducción, por tanto, no es de tipo óhmico.

4. Análisis de circuitos con resistencias.-



En la batería:

$$V_a = V_b + \mathcal{E} - I \cdot r$$

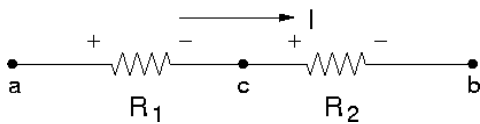
$$V = V_a - V_b = \mathcal{E} - I \cdot r$$

En la resistencia: $I = \frac{V}{R} \Rightarrow$

$$I \cdot R = V = \mathcal{E} - I \cdot r \Rightarrow \mathcal{E} = I \cdot R + I \cdot r = I \cdot (R + r)$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad : \quad r \equiv \text{resistencia interna de la batería } (\rightarrow 0)$$

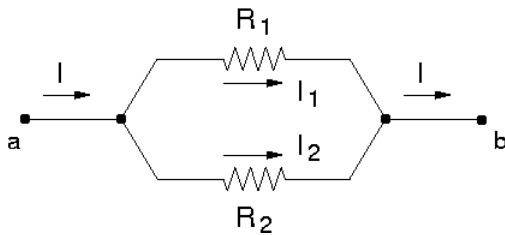
* COMBINACIONES DE RESISTENCIAS:



$$V_a = V_b + I \cdot R_1 + I \cdot R_2$$

$$V = I(R_1 + R_2) = I \cdot R_{eq}$$

✓ Resistencias en serie: $R_{eq} = R_1 + R_2$



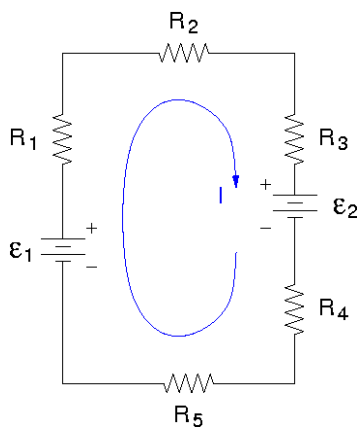
$$I = I_1 + I_2 \quad : \quad \text{corriente total}$$

$$V = V_a - V_b = I \cdot R_1 = I \cdot R_2 = I \cdot R_{eq}$$

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

✓ Resistencias en paralelo: $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

* CIRCUITOS DE UNA MALLA:

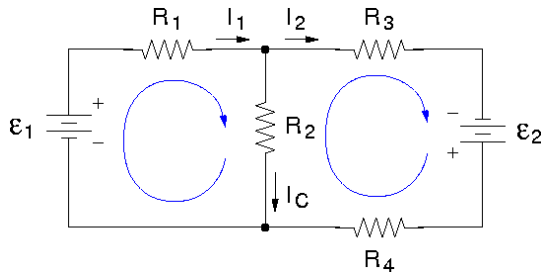


$$\sum_i V_i = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_1 - I R_1 - I R_2 - I R_3 - \mathcal{E}_2 - I R_4 - I R_5 = 0$$

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) = 0$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5)}$$

* CIRCUITOS DE MALLAS MÚLTIPLES:



$$(1) \quad \mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - I_C R_2 = 0$$

$$(2) \quad -\mathcal{E}_2 - I_2 R_4 + I_C R_2 - I_2 R_3 = 0$$

$$(1) \quad \mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - (I_1 - I_2) R_2 = 0$$

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - I_1 R_2 + I_2 R_2 = 0$$

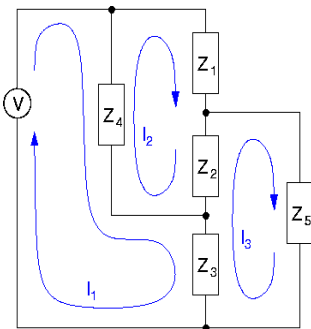
$$(2) \quad -\mathcal{E}_2 - I_2 R_4 + (I_1 - I_2) R_2 - I_2 R_3 = 0$$

$$-\mathcal{E}_2 - I_2 R_4 + I_1 R_2 - I_2 R_2 - I_2 R_3 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_1 - I_1 (R_1 + R_2) + I_2 R_2 &= 0 \\ \mathcal{E}_2 - I_1 R_2 + I_2 (R_4 + R_2 + R_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ y se resuelve para } I_1, I_2.$$

5. Método de corrientes de mallas.-

Existen métodos especiales, basados en las leyes de Kirchhoff, que facilitan la resolución de circuitos complejos. El método de análisis de mallas se basa en la ley del voltaje de Kirchhoff.



Se comienza por suponer que existen corrientes en los circuitos (o lazos) cerrados de tal modo que al menos una corriente pasa por cada elemento. Eligiendo las corrientes de esta manera, la ley de las corrientes de Kirchhoff se satisface de manera automática.

$$I_1 (Z_3 + Z_4) \quad -I_2 Z_4 \quad -I_3 Z_3 \quad = V$$

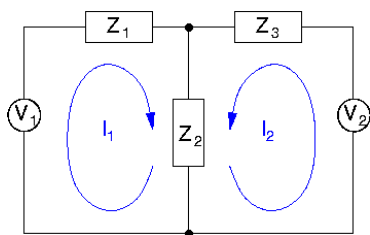
$$-I_1 Z_4 \quad +I_2 (Z_1 + Z_2 + Z_4) \quad -I_3 Z_2 \quad = 0$$

$$-I_1 Z_3 \quad -I_2 Z_2 \quad +I_3 (Z_2 + Z_3 + Z_5) \quad = 0$$

En general: $\sum_{j=1}^n Z_{ij} \cdot I_j = V_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

Las ecuaciones del circuito pueden resolverse más fácilmente mediante el método de los determinantes, dando como resultado los valores de las diferentes corrientes de malla.

Consideremos otro ejemplo:



Las ecuaciones de malla son:

$$I_1 (Z_1 + Z_2) \quad +I_2 Z_2 \quad = V_1$$

$$I_1 Z_2 \quad +I_2 (Z_2 + Z_3) \quad = V_2$$

V_1 y V_2 no tienen por qué estar en fase, de modo que pueden expresarse como:

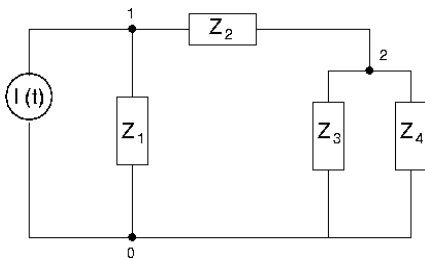
$$\begin{aligned} V_1 &= |V_{10}| \exp(i\omega t) \\ V_2 &= |V_{20}| \exp[i(\omega t + \phi)] \end{aligned}$$

Para asignar las bases correctamente, hay que examinar las frases relativas en $t = 0$ y asignar las direcciones (sentidos) de las corrientes de malla correspondientes.

Cuando los diversos generadores no tienen la misma frecuencia, el problema se reduce a la superposición de movimientos oscilatorios, es decir, de varios circuitos idénticos con un generador diferente en cada caso.

6. Método de tensiones de nodos.-

Estas ecuaciones resultan de la aplicación de la ley de las corrientes de Kirchhoff a cada uno de los nodos. De esta manera, la ley de los voltajes se satisface de manera automática.



Los nodos se numeran, partiendo de cero para el punto cuyo potencial sirva de referencia al circuito (por ejemplo, tierra).

Si el potencial del nodo 0 se toma como 0, entonces en 1:

$$I(t) = \frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_1 - V_2}{Z_2}$$

donde V_1 y V_2 son los potenciales de los nodos 1 y 2, respectivamente. En 2:

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{Z_2} + \frac{V_2}{Z_3} + \frac{V_2}{Z_4}$$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores, se obtienen los voltajes V_1 y V_2 .

Este método es especialmente adecuado para el análisis práctico de circuitos, ya que proporciona de una manera directa los voltajes aplicados a cada elemento de estos.

7. Teorema de superposición.-

"La respuesta de una red lineal conteniendo varias fuentes independientes se halla considerando cada generador por separado y sumando después las respuestas individuales".

Al calcular la respuesta debida a una fuente, todos los demás generadores se sustituyen por sus respectivas resistencias internas; es decir, las fuentes de voltaje se hacen $V_s = 0$, y los generadores de corriente, $I_s = 0$.

8. Teorema de Thèvenin.-

"Toda red lineal puede reemplazarse, respecto de un par de terminales dado, por una fuente de voltaje equivalente V_{Th} (igual al voltaje de circuito abierto) en serie con la resistencia R_{Th} vista entre dichos terminales".

Para determinar R_{Th} , todas las fuentes de voltaje independientes se cortocircuitan, y todas las fuentes de corriente independientes se abren. Este teorema se suele utilizar para reducir el número de mallas en una red.

9. Teorema de Norton.-

"Toda red lineal puede ser reemplazada, con respecto de un par de terminales dados, por un generador de corriente (igual a la corriente de cortocircuito) en paralelo con la resistencia vista entre los dos terminales".

10. Equivalencia Thèvenin-Norton.-

Todas las formulaciones descritas anteriormente (método de mallas, de nodos, teoremas de Thèvenin y Norton) derivan de la aplicación de las leyes de Kirchhoff. Por tanto, todas ellas son equivalentes y puedan ser utilizadas indistintamente.

11. Teorema de voltaje de circuito abierto – corriente de cortocircuito.-

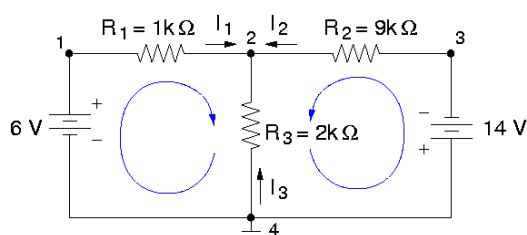
Como corolario de los teoremas de Thèvenin y Norton, se derivan las siguientes relaciones:

$$V = IR = \frac{I}{G}; I = \frac{V}{R} = GV; R = \frac{V}{I}$$

donde G es la conductancia entre dos terminales de una red. Por ejemplo, la primera ecuación indica que "el voltaje de circuito abierto es igual a la corriente de cortocircuito dividida por la conductancia" en un segmento dado del circuito.

Estas relaciones permiten hallar fácilmente la diferencia de potencial entre dos puntos.

Ejemplo: Hallar la diferencia de potencial entre los nodos 2 y 4 del circuito de la figura.



Cortocircuitando los nodos 2 y 4, la corriente que circula por esa rama, debida a la batería de 6 V, es:

$$I = \frac{6 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} = 6 \text{ mA}$$

La debida a la segunda batería será:

$$I' = -\frac{14 \text{ V}}{9 \text{ k}\Omega} = -1,556 \text{ mA}$$

Luego la corriente total de cortocircuito es:

$$I_{cc} = 6 \text{ mA} - 1,556 \text{ mA} = 4,444 \text{ mA}$$

Conectando a tierra los nodos 1 y 3, la conductancia entre 2 y 4 corresponde a las 3 resistencias en paralelo:

$$G = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{18 + 9 + 2}{18} = \frac{29}{18} = 1,611 \text{ mA/V}$$

Por tanto:

$$V_{24} = \frac{I_{cc}}{G} = \frac{4,444 \text{ mA}}{1,611 \text{ mA/V}} = 2,759 \text{ V}$$

Las corrientes individuales I_1 , I_2 pueden hallarse aplicando la ley de Kirchhoff de las mallas, por ejemplo:

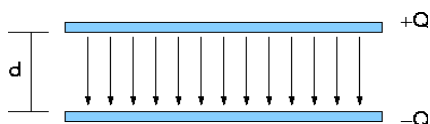
$$I_2 \cdot R_2 = V_{24} - 14\text{V} \Rightarrow I_2 = -1,862 \text{ mA}$$

12. Capacidad y condensadores.-

Cuando un conductor aislado se conecta a una fuente de potencial (\equiv batería), se produce una acumulación de carga sobre el conductor hasta que se igualan los potenciales ($\Rightarrow E = 0$); definimos la capacidad del conductor aislado como el cociente entre la carga almacenada y el potencial:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (1 \text{ Faradio} \equiv 1 \text{ C} / 1 \text{ V}).$$

Un conductor es un dispositivo formado por dos conductores aislados y diseñado para almacenar carga. Por ejemplo, sea un condensador de placas paralelas:

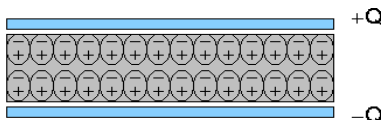


Suponiendo que la separación d de las placas es pequeña comparada con su superficie, y despreciando los efectos de bordes:

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{A} \frac{d}{\epsilon_0} \Rightarrow Q = \epsilon_0 \frac{VA}{d}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Si entre las placas del condensador introducimos un dieléctrico, éste se polariza debido al campo creado por aquél; las cargas del dieléctrico no pueden moverse libremente, pero se desplazan ligeramente formando pequeños dipolos.



Inicialmente, la densidad de carga en las placas es σ_{libre} ; al

polarizarse el dieléctrico, aparece una densidad de carga inducida σ_{pol} de signo opuesto:

$$\sigma^* = \sigma_{\text{libre}} - \sigma_{\text{pol}} \Rightarrow \sigma_{\text{libre}} = \sigma^* + \sigma_{\text{pol}}$$

En general: $\sigma_{\text{pol}} = \epsilon_0 \chi_e E$; $\chi_e =$ susceptibilidad eléctrica

$$\sigma_{\text{libre}} = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 E (1 + \chi_e)$$

$$E_0 = \frac{\sigma_{\text{libre}}}{\epsilon_0} = E (1 + \chi_e) \Rightarrow E = \frac{E_0}{\kappa}$$

$\kappa =$ constante dieléctrica relativa del material

$$\epsilon = \epsilon_0 \kappa$$

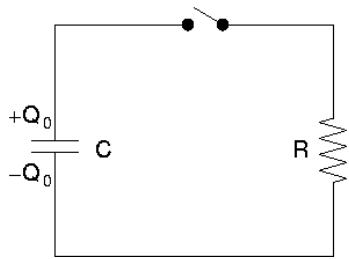
$$V = E d = \frac{E_0 d}{\kappa} = \frac{V_0}{\kappa}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_0/\kappa} = \kappa \frac{Q}{V_0} = \kappa C_0 = C$$

El efecto del dieléctrico es aumentar la cantidad de carga que puede almacenarse con una determinada diferencia de potencial.

13. Carga y descarga de un condensador: circuitos RC.-

◆ DESCARGA DEL CONDENSADOR.-



Inicialmente, la diferencia de potencial en el condensador es:

$$V_0 = \frac{Q_0}{C}$$

Al cerrar el interruptor, el condensador empieza a descargarse:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC}, \text{ pero } I \text{ no es constante porque depende de } Q:$$

$$I = - \frac{dQ}{dt} \quad ; \quad Q \text{ es la carga que queda en el condensador.}$$

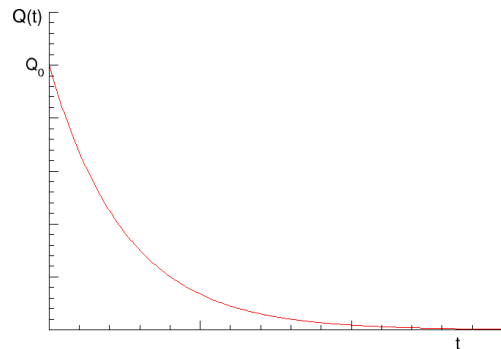
Aplicando a esta malla la primera ley de Kirchhoff :

$$\frac{Q}{C} - I R = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0$$

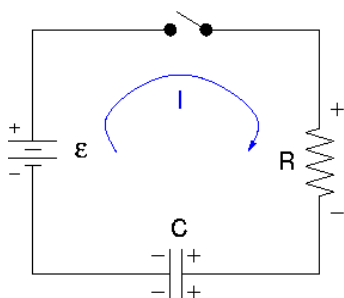
$$\frac{dQ}{Q} = - \frac{1}{RC} dt \Rightarrow \ln Q = - \frac{t}{RC} + A$$

$$Q(t) = B e^{-t/RC} \quad ; \quad B = Q(0) = Q_0$$

$\tau = RC$: constante de tiempo de circuito.



◆ CARGA DEL CONDENSADOR.-



El condensador está descargado inicialmente; en un instante cualquiera después de cerrar el interruptor, tenemos una carga $Q(t)$ en el condensador y una corriente $I(t)$ recorriendo el circuito.

$$\mathcal{E} - V_R - V_C = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - I R - \frac{Q}{C} = 0$$

$$I = + \frac{dQ}{dt} \quad (\text{porque la carga del condensador aumenta}):$$

$$\mathcal{E} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \Rightarrow RC \frac{dQ}{dt} = C\mathcal{E} - Q$$

$$\frac{dQ}{C\mathcal{E} - Q} = \frac{1}{RC} dt \Rightarrow -\ln(\mathcal{E}C - Q) = \frac{t}{RC} + A$$

$$C\mathcal{E} - Q = B e^{-t/RC} \Rightarrow Q = C\mathcal{E} - B e^{-t/RC}$$

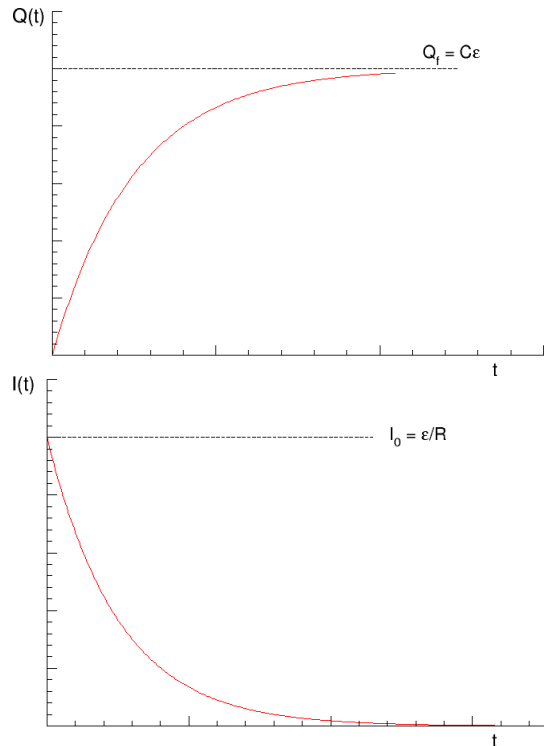
Condición inicial: $Q(t=0) = 0 = \mathcal{E}C - B \Rightarrow B = C\mathcal{E}$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow Q \rightarrow C\mathcal{E} \Rightarrow C\mathcal{E} = Q_f$$

$$Q(t) = Q_f (1 - e^{-t/RC})$$

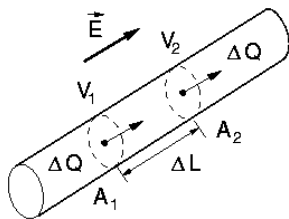
$$I = \frac{dQ}{dt} = -C\mathcal{E} \left(-\frac{1}{RC} \right) e^{-t/RC} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$

$$t = 0 : I = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-t/RC}$$



14. Energía en los circuitos eléctricos.-

La corriente eléctrica consiste en un movimiento de cargas (e^-) a lo largo de un material conductor: las cargas se aceleran debido a la existencia de un campo eléctrico \vec{E} , ganando energía cinética que luego se pierde en parte debido a choques con los iones que forman el material: que



Energía eléctrica \rightarrow Energía cinética \rightarrow Energía térmica

Cuando se alcanza el régimen estacionario, las cargas se mueven con velocidad constante.

En un intervalo de tiempo Δt pasa una cantidad de carga ΔQ por la sección transversal A_1 , con potencial V_1 ; la energía potencial es:

$$U_{el} = (\Delta Q) \cdot V_1$$

Cuando sale la carga ΔQ por la sección A_2 , con potencial V_2 :

$$U_{el} = (\Delta Q) \cdot V_2$$

$$\Delta U_{el} = (\Delta Q) (V_2 - V_1) = \Delta Q(-V)$$

$$V = V_1 - V_2 = \text{caída de potencial en el segmento.}$$

Cantidad de energía eléctrica que las cargas pierden por unidad de tiempo:

$$-\Delta U_{el} = (\Delta Q) V \Rightarrow -\frac{\Delta U_{el}}{\Delta t} = V \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t} = V \cdot I$$

$P = V \cdot I$: potencia disipada en el segmento conductor.

Si se trata de una resistencia, usando la ley de Ohm:

$$P = \frac{V^2}{R} ; P = I^2 \cdot R$$

Si $R=0$, entonces $V=0$ y el segmento de conductor no disipa energía.

Transformación de energía eléctrica en calorífica: **Efecto Joule.**

15. Almacenamiento de energía eléctrica: condensadores y bobinas.-

En un condensador cargado tenemos dos electrodos, uno de los cuales se encuentra a un potencial más alto. Por tanto, la carga de ese electrodo posee una energía potencial más elevada.

Sea un condensador que contiene una carga q :

$$V = \frac{q}{C}$$

si añadimos una pequeña cantidad de carga δq :

$$dU = V \cdot dq = \frac{q}{C} dq : \text{incremento de la energía potencial del condensador.}$$

El incremento total de energía, durante todo el proceso de carga del condensador, es:

$$\int dU = \int_0^{Q_f} \frac{1}{C} q dq = \frac{1}{2} \frac{Q_f^2}{C} = U_C$$

o también:

$$U_C = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V$$

La energía electrostática se encuentra almacenada en forma de campo eléctrico. Supongamos un condensador de placas paralelas, con un dieléctrico de constante κ :

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{\sigma}{\kappa \epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\kappa \epsilon_0 A} = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A} = \frac{Q}{\epsilon A}$$

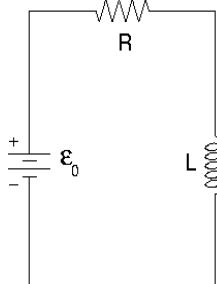
$$Q = \epsilon A E ; V = E \cdot d$$

$$U = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} (\epsilon A E)(E d) = \frac{1}{2} \epsilon (A \cdot d) E^2$$

$A \cdot d$ es el volumen comprendido entre las placas del condensador; entonces, la densidad de energía eléctrica es:

$$u = \frac{U}{\text{Vol.}} = \frac{U}{A \cdot d} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = u$$

Para hacer circular una corriente a través de una bobina, es necesario realizar un trabajo (\Rightarrow energía).



$$\mathcal{E}_0 = IR + L \frac{dI}{dt}$$

$$\mathcal{E}_0 I = I^2 R + LI \frac{dI}{dt}$$

$\mathcal{E}_0 I$ es la potencia suministrada por la batería ($P = VI$); $I^2 R$ es la potencia que se disipa en la resistencia, y $LI \frac{dI}{dt}$ es la potencia que se consume en la bobina.

Si la energía potencial de la bobina es U_m :

$$LI \frac{dI}{dt} = \frac{dU_m}{dt}$$

$$U_m = \int dU_m = \int_0^{I_f} LI dI = \frac{1}{2} LI_f^2 = U_m$$

La corriente que circula por la bobina crea un campo magnético; este campo puede realizar trabajo sobre otras cargas, luego para producirlo es necesario aportar energía. Por tanto, la energía almacenada en la bobina se encuentra en el campo magnético.

Ejemplo: Sea un solenoide:

$$B = \mu_0 n I ; I = \frac{B}{\mu_0 n}$$

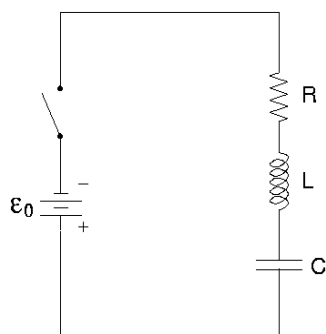
$$L = \mu_0 n^2 A l$$

Al es el volumen del solenoide:

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(\mu_0 n^2 Al) \left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{AlB^2}{\mu_0}$$

$$u_m = \frac{U_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = u_m \quad : \text{densidad de energía magnética.}$$

16. Corrientes de cierre y apertura en circuitos RLC.-



Una vez cerrado el interruptor y conectada la fuente de tensión \mathcal{E}_0 , aplicando la ley de Kirchhoff para las tensiones:

$$\mathcal{E}_0 = V_R + V_L + V_C$$

$$\mathcal{E}_0 = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{d\mathcal{E}_0}{dt} = R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C} I$$

En el caso DC,

$$\frac{d\mathcal{E}_0}{dt} = 0$$

y la solución a la ecuación diferencial homogénea es:

$$I(t) = A \cdot e^{i\omega_+ t} + B \cdot e^{i\omega_- t}$$

en donde:

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \frac{1}{2L} \left(-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \right) = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{CR^2 - 4L}{2L}} \\ &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{CR^2 - 4L}{4L^2 C}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \\ &= -\frac{R}{2L} \pm i \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\frac{R}{2L} \pm i\omega_0 \end{aligned}$$

por tanto:

$$I(t) = \left(A \cdot e^{i\omega_0 t} + B \cdot e^{-i\omega_0 t} \right) e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t}$$

En $t = 0$,

$$I(0) = 0 = A + B \Rightarrow A = -B :$$

Además, en $t = 0$ tanto I como Q son nulas, por lo que:

$$\begin{aligned} I(t) &= A \left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t} \right) e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} \\ &= D \operatorname{sen}(\omega_0 t) e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} \end{aligned}$$

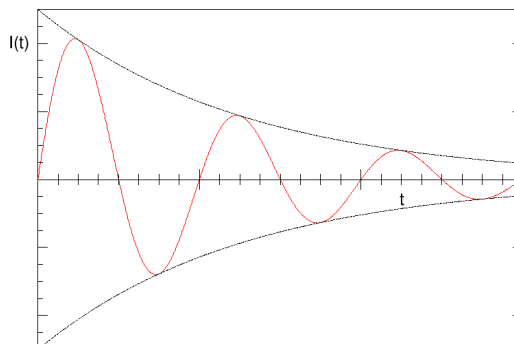
El resultado es un comportamiento oscilatorio amortiguado:

$$\mathcal{E}_0 = L \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = L D \omega_0 \cos(\omega_0 t) e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} \Big|_{t=0} = L D \omega_0$$

$$D = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 L} \Rightarrow I(t) = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 L} \right) \operatorname{sen}(\omega_0 t) e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t}$$

La corriente oscila con la **frecuencia natural** del circuito:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

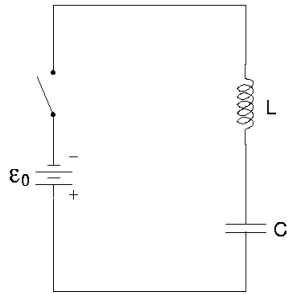


y con una amplitud

$$\left(\frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 L}\right) e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t}$$

que decrece con el tiempo.

17. Circuitos LC: oscilaciones libres, frecuencia propia.-



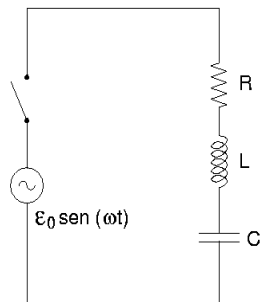
Este caso se reduce al anterior haciendo $R=0$. Entonces:

$$I(t) = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 L}\right) \text{sen}(\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Este sistema no tiene amortiguamiento, por lo que produce oscilaciones permanentes.

18. Circuitos LCR: Oscilaciones amortiguadas y forzadas.-



En este caso se aplica al circuito una señal alterna con frecuencia ω :

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \mathcal{E}_0 \omega \cos(\omega t)$$

Asumiendo que la señal alterna aplicada es suficientemente intensa, la solución a la ecuación será una corriente que oscila con la misma frecuencia del voltaje externo, de un modo equivalente al de las oscilaciones forzadas de un muelle:

$$I(t) = I_0 \text{sen}(\omega t - \delta)$$

Al resolver la ecuación diferencial aparecen mezclados términos con $\text{sen}(\omega t)$ y $\text{cos}(\omega t)$, por lo que resulta conveniente utilizar funciones complejas:

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} \quad (\text{el voltaje aplicado será la parte real})$$

$$I(t) = I_0 e^{i(\omega t + \theta)} \quad (\text{la corriente verdadera que circule por el circuito será la parte real de la solución})$$

Así:

$$\frac{dI(t)}{dt} = i\omega I_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} = -\omega^2 I_0 e^{i\omega t}$$

y la ecuación queda:

$$-L\omega^2 I_0 e^{i\omega t} + i\omega R I_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{C} I_0 e^{i\omega t} = i\omega V_0 e^{i\omega t}$$

$$\left(\frac{-\omega^2 L}{i\omega} + \frac{i\omega R}{i\omega} + \frac{1}{i\omega C}\right) I_0 = V_0$$

$$\left(i\omega L + R - \frac{i}{\omega C}\right) I_0 = V_0 \Rightarrow Z \cdot I_0 = V_0$$

Z es la impedancia compleja del circuito:

$$Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Así:

$$|Z| = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2}$$

por tanto:

$$\hat{I}(t) = \frac{V_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \theta)}$$

y la corriente real en el circuito será:

$$I(t) = \Re \{ \hat{I}(t) \} = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta)$$

ϕ es el desfase: desplazamiento en el tiempo entre la señal aplicada $V(t)$ y la respuesta producida, $I(t)$:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R} \quad : \text{cociente entre las partes imaginaria y real de } Z.$$

19. Potencia instantánea y potencia promedio.-

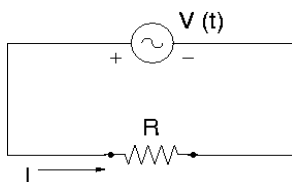
En general, la potencia instantánea aportada a un circuito en un momento t es:

$$P(t) = \Re \{ I(t) \} \cdot \Re \{ V(t) \}$$

La potencia media se obtiene tomando el promedio sobre un período completo:

$$\langle P \rangle = \langle \Re \{ I(t) \} \cdot \Re \{ V(t) \} \rangle$$

Tomemos por ejemplo un circuito simple con una fuente de voltaje sinusoidal y una resistencia:



La impedancia de la resistencia es puramente real: $Z_R = R$. Entonces, la caída de potencial en ésta es:

$$V_R = I R$$

Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff:

$$V(t) - V_R = 0$$

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t): \text{fuente sinusoidal. Entonces:}$$

$$V_0 \cos(\omega t) - I R = 0 \Rightarrow I(t) = \left(\frac{V_0}{R} \right) \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t)$$

En este caso, la corriente y el voltaje están en fase, porque la impedancia no tiene parte imaginaria que dé lugar a un desfase.

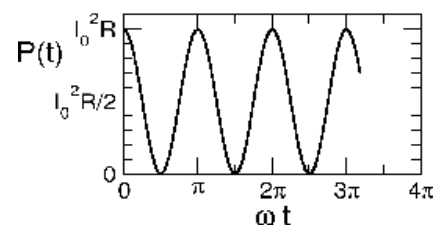
La potencia instantánea disipada en la resistencia es:

$$P(t) = I^2 R = IV = [I_0 \cos(\omega t)]^2 R = I_0^2 R \cos^2(\omega t)$$

$P(t)$ varía entre cero y un valor máximo $I_0^2 R$. Lo que nos interesa en general es el valor promedio disipado a lo largo de uno o varios ciclos; para hallarlo tenemos que calcular la energía total W_T liberada durante el tiempo que dura un periodo $t = T = 2\pi/\omega$:

$$W_T = \int_0^T P(t) dt = \int_0^T I_0^2 R \cos^2(\omega t) dt$$

$$W_T = \int_0^{2\pi} \left(\frac{I_0^2 R}{\omega} \right) \cos^2 \theta d\theta = \left(\frac{I_0^2 R}{\omega} \right) \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$$



Usando la relación trigonométrica:

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left. \frac{\theta}{2} \right|_0^{2\pi} + \left. \frac{\sin 2\theta}{4} \right|_0^{2\pi} = \pi\end{aligned}$$

por tanto,

$$W_T = \frac{I_0^2 R \pi}{\omega}$$

La potencia promedio, entonces, será igual a la energía total liberada dividida por la duración de un periodo T :

$$\langle P \rangle = \frac{W_T}{T} = \left(\frac{I_0^2 R \pi}{\omega} \right) \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) = \frac{I_0^2 R}{2}$$

20. Valores eficaces de corriente y tensión.-

En general, los aparatos de medida (voltímetros, amperímetros, etc.) que están diseñados para medir valores eficaces, también llamados "cuadráticos medios". Estos valores se definen así:

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{\langle I^2 \rangle} ; \quad V_{\text{ef}} = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\langle I^2 \rangle &= \langle I_0^2 \cos^2(\omega t) \rangle = I_0^2 \left[\frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t) dt \right] \\ &= I_0^2 \left(\frac{1}{\omega T} \right) \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = I_0^2 \left(\frac{1}{\omega T} \right) \pi = I_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega 2\pi} \right) \pi \\ &= \frac{I_0^2}{2}\end{aligned}$$

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Del mismo modo, $V_{\text{ef}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$.

Cuando nos referimos al voltaje alterno de uso doméstico, 220 V es el valor eficaz. Así pues, el voltaje máximo o de pico de esta tensión alterna es $V_0=311$ V, y la ecuación de $V(t)$:

$$V(t) = (311 \text{ V}) \cos(100\pi t) \quad (\nu = 50 \text{ Hz})$$

Volviendo a la potencia media disipada en la resistencia:

$$\langle P \rangle = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{(\sqrt{2} I_{\text{ef}})^2 R}{2} = I_{\text{ef}}^2 R$$

Por tanto, la corriente eficaz es igual a una corriente continua que produjera la misma disipación de energía por calentamiento Joule en la resistencia R que la corriente alterna que estamos aplicando.

En general, la potencia media suministrada por un generador es:

$$\langle P \rangle = V_{\text{ef}} \cdot I_{\text{ef}}$$

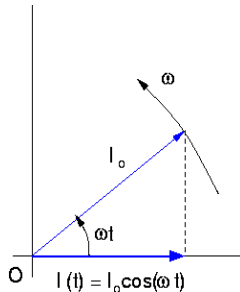
Asimismo, la relación entre corriente y tensión eficaces es:

$$I_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{ef}}}{R}$$

De modo que se puede trabajar con valores eficaces alternos del mismo modo que con magnitudes continuas.

21. Impedancia compleja. Fasores.

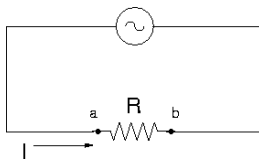
Para representar voltajes y corrientes que varían de forma sinusoidal, pueden utilizarse diagramas de vectores rotantes; en ellos, el valor instantáneo de la magnitud que varía sinusoidalmente viene dada por la proyección del vector sobre el eje horizontal.



Estos vectores se llaman "*fasores*" y no representan cantidades físicas reales, asociadas con una dirección del espacio, sino que se trata de una entidad geométrica que ayuda a describir cantidades que varían periódicamente con el tiempo.

Vamos a estudiar la relación voltaje-corriente para los diferentes elementos de circuito, por los que circula una corriente sinusoidal.

I) Resistencia:



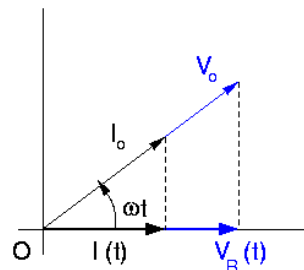
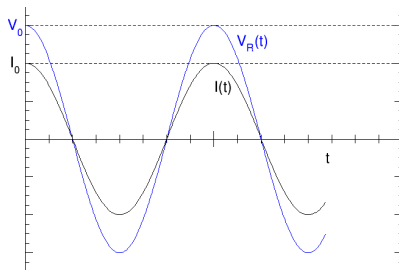
$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

Aplicando la ley de Ohm:

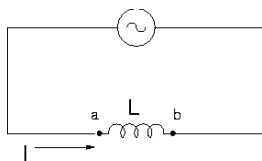
$$V_R = I \cdot R = I_0 R \cos(\omega t) = V_0 \cos(\omega t)$$

En este caso, la corriente está en fase con el voltaje, y la impedancia de la resistencia es puramente real:

$$Z_R = R$$



II) Inducción:



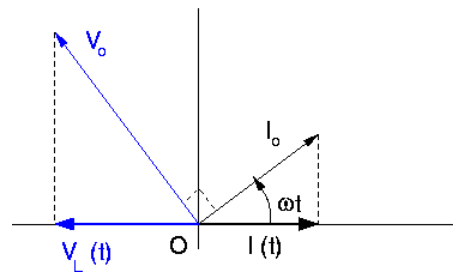
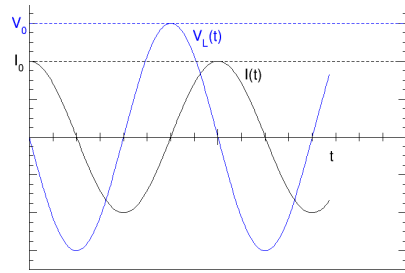
Como la corriente varía con el tiempo, aparece una diferencia de potencial en los extremos de la inducción:

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega L I_0 \sin(\omega t) = \omega L I_0 \cos(\omega t + \pi/2)$$

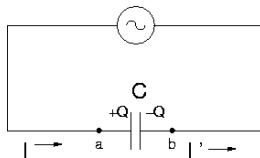
(Para comprobar el criterio de signos hay que considerar las diferentes posibilidades: sentido de circulación de la corriente, signo de la derivada de I , etc).

La fase que introduce el inductor es $\phi = +\pi/2$; con respecto de las amplitudes, tenemos:

$$|V_L(t)| = \omega L |I(t)| \text{ , por tanto la impedancia en este caso es: } Z_L = \omega L$$



III) Condensador:



En este caso, la corriente que circula por el circuito está relacionada con la carga acumulada en el condensador:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = I_0 \cos(\omega t)$$

Corriente positiva implica que aumente la carga en la placa izquierda del condensador.

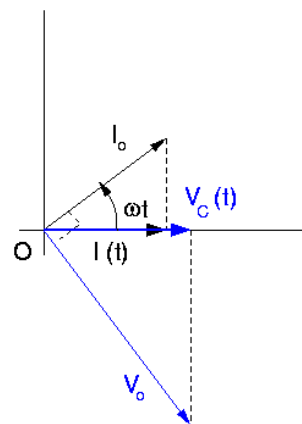
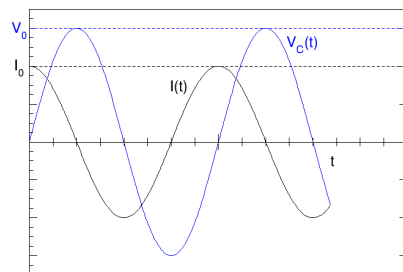
$$Q(t) = \int I(t) dt = \int I_0 \cos(\omega t) dt = \left(\frac{I_0}{\omega}\right) \text{sen}(\omega t)$$

$$Q = C \cdot V_C \Rightarrow V_C(t) = \left(\frac{I_0}{\omega C}\right) \text{sen}(\omega t) = \left(\frac{I_0}{\omega C}\right) \cos(\omega t - \pi/2)$$

$$|V_C(t)| = \left(\frac{1}{\omega C}\right) |I(t)|$$

Por tanto, la fase introducida por el condensador es $\phi = -\pi/2$, y le impedancia vale:

$$|Z_C| = \frac{1}{\omega C}$$

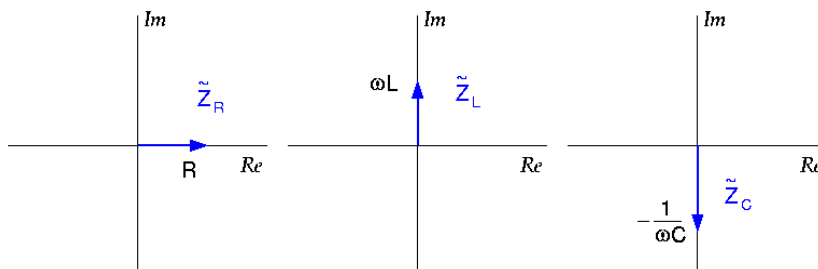


La impedancia de los tres tipos de elementos puede representarse mediante vectores en el plano complejo:

$$Z_R = (R, 0);$$

$$Z_L = (0, \omega L);$$

$$Z_C = (0, -1/\omega C)$$

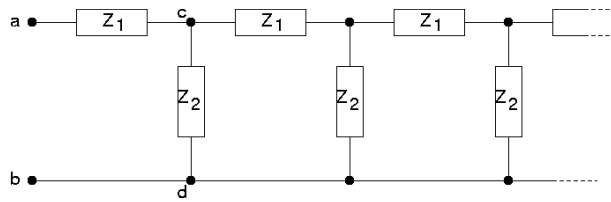


22. Respuesta en frecuencia.-

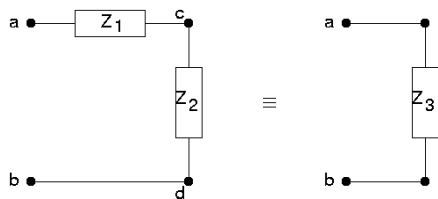
El paso de la corriente a través de los distintos elementos de un circuito implica una transferencia de energía. En general, en estos procesos no pueden realizarse instantáneamente, lo cual implicaría

potencias infinitas; por el contrario, se necesita un tiempo ("transitorio") para llegar a alcanzar el estado estacionario. Esto hace que la respuesta de un circuito a una señal (voltaje o corriente) alterna dependa de la frecuencia de ésta.

Consideramos una escalera de impedancias:

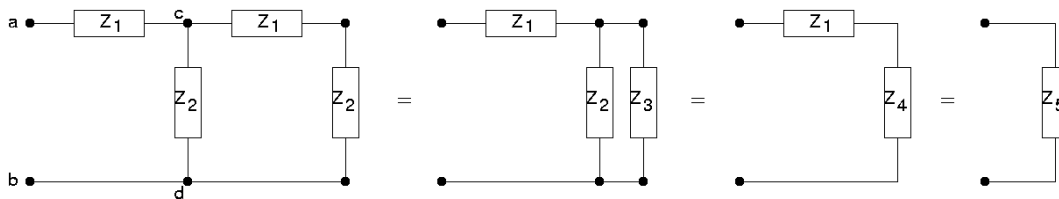


Esta escalera está construida a base de elementos como el (abcd):



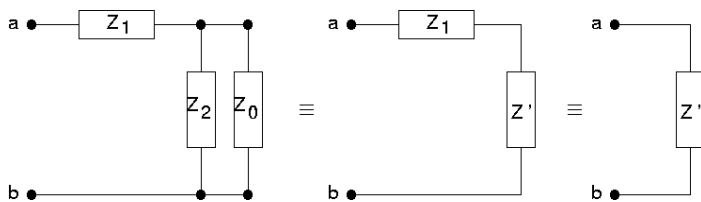
Por las reglas de la suma de impedancias, $Z_3 = Z_1 + Z_2$

Pasando al siguiente elemento, y sustituyendo al primero por su impedancia equivalente:



$$\frac{1}{Z_4} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} ; Z_5 = Z_1 + Z_4 ; \text{ y así sucesivamente.}$$

Supongamos que la escalera es infinita, y que su impedancia equivalente es Z_0 ; si le añadimos un elemento más, seguirá siendo infinita, por lo que su impedancia equivalente tendrá que ser también Z_0 .



$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_2} \Rightarrow Z' = \frac{Z_0 Z_2}{Z_0 + Z_2} ; Z'' = Z_1 + \frac{Z_0 Z_2}{Z_0 + Z_2}$$

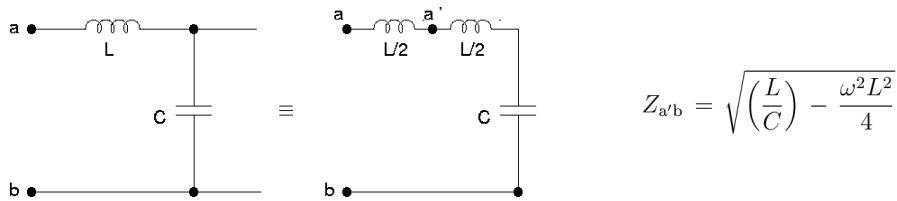
$$Z'' = Z_0 = Z_1 + \frac{Z_0 Z_2}{Z_0 + Z_2} \Rightarrow Z_0^2 + Z_0 Z_2 = Z_1 Z_0 + Z_1 Z_2 + Z_0 Z_2$$

$$Z_0^2 - Z_1 Z_0 - Z_1 Z_2 = 0 \Rightarrow Z_0 = \frac{Z_1 \pm \sqrt{Z_1^2 + 4Z_1 Z_2}}{2}$$

Supongamos ahora que $Z_1 = i\omega L$ (una bobina) y $Z_2 = 1/i\omega C$ (un condensador). En este caso, la impedancia equivalente del circuito será:

$$Z_0 = \frac{i\omega L}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{L}{C}\right) - \frac{\omega^2 L^2}{4}}$$

Como el primer término es la mitad de la impedancia de una bobina, podemos eliminarlo partiendo ésta en dos mitades iguales y situándonos en medio:

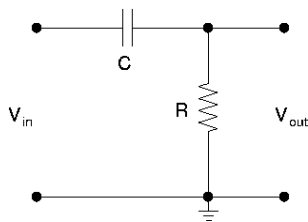


• si $\omega^2 > \frac{4}{LC}$, la impedancia $Z_{a'b}$ será imaginaria pura;

• si $\omega^2 < \frac{4}{LC}$, la impedancia será real. En este caso, el circuito absorbe energía continuamente, del mismo modo que una resistencia. La razón es que la energía suministrada por el generador es absorbida primero por los primeros elementos (bobina y condensador), luego por los segundos, y así sucesivamente. En cambio, a frecuencias altas el sistema no tiene tiempo de responder, de modo que la energía no se propaga a lo largo de la escalera.

23. Filtros de frecuencias.-

Sea el circuito de la figura:



La impedancia equivalente del circuito es:

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C}$$

y aplicando la ley de Ohm compleja, la corriente que circula es:

$$I = \frac{V_{in}}{Z} = \frac{V_{in}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{V_{in}}{R - \frac{i}{\omega C}} = \frac{V_{in}}{R - \frac{i}{\omega C}} \frac{\left(R + \frac{i}{\omega C}\right)}{\left(R + \frac{i}{\omega C}\right)}$$

$$I = \frac{V_{in} \left(R + \frac{i}{\omega C}\right)}{\left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)}$$

V_{out} es la caída de voltaje en la resistencia:

$$V_{out} = I \cdot R = \frac{V_{in} \left(R + \frac{i}{\omega C}\right) R}{\left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)}$$

Si sólo nos interesa el módulo de V_{out} , y no su fase:

$$|V_{out}| = (V_{out} \cdot V_{out}^*)^{1/2} = \left[\frac{V_{in}^2 R^2 \left(R + \frac{i}{\omega C}\right) \left(R - \frac{i}{\omega C}\right)}{\left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)^2} \right]^{1/2}$$

$$= V_{in} R \left[\frac{\left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)}{\left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)^2} \right]^{1/2} = V_{in} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

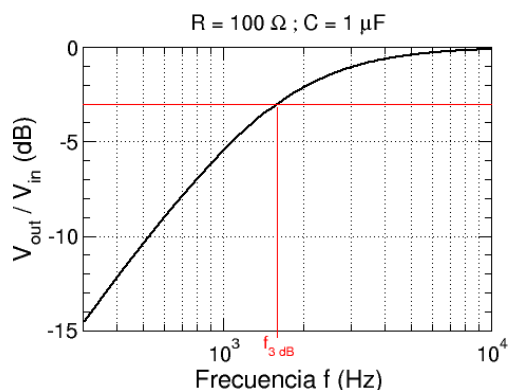
$$|V_{out}| = V_{in} \frac{R\omega C}{\sqrt{R^2\omega^2 C^2 + 1}} ; \omega = 2\pi f$$

$$|V_{out}| = V_{in} \frac{2\pi f RC}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}$$

Límites:

• $f \rightarrow 0 \Rightarrow (2\pi f RC)^2 \ll 1$

$$\frac{|V_{out}|}{V_{in}} \propto f$$



- $f \rightarrow \infty \Rightarrow (2\pi fRC)^2 \gg 1$

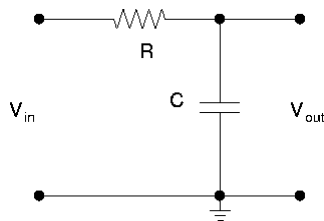
$$\frac{|V_{out}|}{V_{in}} \cong 1$$

Valor característico para frecuencias altas: $1/RC = 10^4$ en este ejemplo.

Otro punto característico es la posición del "codo" o vértice de -3 dB. Para este tipo de filtros, $f_{-3dB} = 1/(2\pi RC)$ (≈ 1590 Hz)

$$1 \text{ dB} = 20 \log_{10} (V_{out}/V_{in})$$

Intercambiando las posiciones del condensador en la resistencia, se obtiene un filtro paso bajo:



En este caso, $V_{out} = V_C = I Z_C = I \frac{1}{i\omega C}$

$$V_{out} = V_{in} \left(\frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} \right) \cdot \frac{1}{i\omega C} = V_{in} \frac{i\omega C}{(i\omega RC + 1)i\omega C} = V_{in} \left(\frac{1}{1 + i\omega RC} \right)$$

$$|V_{out}| = (V_{out} \cdot V_{out}^*)^{1/2} = V_{in} \left[\left(\frac{1}{1 + i\omega RC} \right) \left(\frac{1}{1 - i\omega RC} \right) \right]^{1/2}$$

$$= V_{in} \left[\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right]^{1/2} = \frac{V_{in}}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2}}$$

Por tanto, este filtro deja pasar las frecuencias bajas:

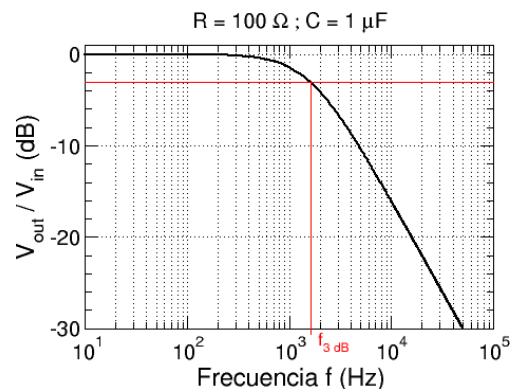
- $f \rightarrow 0 \Rightarrow (2\pi fRC)^2 \ll 1$

$$\frac{|V_{out}|}{V_{in}} \cong 1$$

- $f \rightarrow \infty \Rightarrow (2\pi fRC)^2 \gg 1$

$$\frac{|V_{out}|}{V_{in}} \propto \frac{1}{f}$$

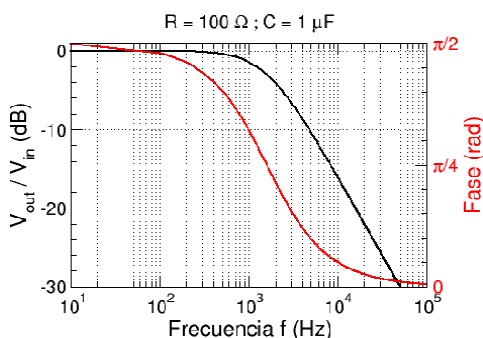
De nuevo, $f_{-3dB} = 1/(2\pi RC)$ (≈ 1590 Hz).



24. Diagramas de Bode.-

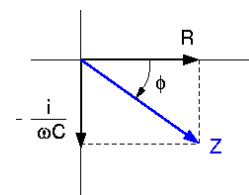
Los gráficos utilizados más arriba se denominan "diagramas de Bode", y sirven para representar gráficamente la ganancia y la fase de un circuito en función de la frecuencia aplicada. Normalmente, la ganancia se representa en decibelios ($20 \log_{10} (V_{out}/V_{in})$), y la frecuencia, en escala logarítmica.

En general, las curvas de Bode se pueden aproximar con bastante precisión mediante segmentos rectos interconectados.



En el caso del filtro paso bajo, podemos calcular la fase a partir del diagrama de la impedancia compleja:

$$\phi = \arctan \left(-\frac{1}{\omega RC} \right)$$



Para este filtro sabemos que:

$$\frac{|V_{out}|}{V_{in}} = (1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2)^{-1/2}$$

Representando estas características en escala logarítmica (como en los diagramas de Bode) :

$$\log\left(\frac{|V_{out}|}{V_{in}}\right) = -\frac{1}{2} \log(1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2)$$

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{|V_{out}|}{V_{in}}\right) &\cong -\frac{1}{2} \log(4\pi^2 f^2 R^2 C^2) = -\frac{1}{2} [\log(f^2) + \log(4\pi^2 R^2 C^2)] \\ &= -\log(f) - \frac{1}{2} \log(4\pi^2 R^2 C^2) \end{aligned}$$

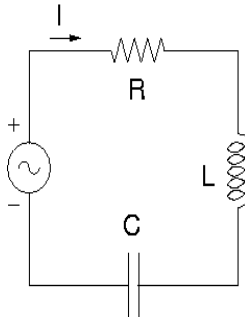
En el límite de frecuencias altas:

$$4\pi^2 f^2 R^2 C^2 \gg 1 \Rightarrow f^2 \gg \frac{1}{4\pi^2 R^2 C^2}$$

de modo que la gráfica es una línea recta con pendiente -1.

25. Resonancia.-

Consideremos un circuito *LCR* con generador sinusoidal:



$$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff:

$$V_0 \cos(\omega t) - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} - IR = 0$$

$$\text{Como } I = \frac{dQ}{dt} : L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos(\omega t)$$

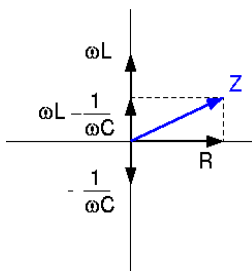
La solución a esta ecuación diferencial es:

$$I(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t - \delta)$$

con una amplitud que depende de la frecuencia y viene dada por:

$$I_0(\omega) = \frac{V_0}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{1/2}}$$

La razón de esta dependencia, de nuevo, es la facilidad o dificultad que experimentan los diferentes elementos del circuito a la hora de seguir las variaciones temporales impuestas por el generador. El ángulo de fase δ viene dado por:



$$\tan \delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

como puede comprobarse fácilmente a partir del diagrama de fasores.

La impedancia el circuito es

$$Z = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{1/2}$$

El término $(\chi_L - \chi_C) = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ se denomina reactancia total del circuito.

$$I(t) = \left(\frac{V_0}{Z}\right) \cos(\omega t - \delta) ,$$

y la corriente máxima que circula por el circuito, para una frecuencia ω dada, viene dada por

$$I_{max} = \left(\frac{V_0}{Z}\right) , \text{ cuando } |\cos(\omega t - \delta)| = 1$$

$$I_{\max} = \frac{V_0}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad ; \quad \text{cuando } \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ , el valor de } Z \text{ es m\u00ednimo:}$$

$$I_{\max}^{\text{res}} = \frac{V_0}{R}$$

$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ es la **frecuencia de resonancia**. Para este valor de la frecuencia, el desfase es 0:

$$\delta = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = 0$$

La corriente que circula por el circuito est\u00e1 en fase con la tensi\u00f3n aplicada, y la transmisi\u00f3n de energ\u00eda a los diferentes elementos se produce con la m\u00e1xima eficacia.

Como ni la bobina ni el condensador disipan energ\u00eda, la potencia media suministrada por la fuente debe ser igual a la disipada en la resistencia:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R$$

Por otra parte, la potencia suministrada por la fuente es:

$$P = V \cdot I = V_0 \cos(\omega t) \cdot I_0 \cos(\omega t - \delta) \quad (\text{potencia instant\u00e1nea})$$

$$\langle P \rangle = V_0 I_0 \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \delta) dt$$

Desarrollando el segundo coseno:

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos(\omega t) \cos(\delta) + \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\delta)$$

$$\langle P \rangle = V_0 I_0 \frac{1}{T} \int_0^T [\cos^2(\omega t) \cos(\delta) + \cos(\omega t) \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\delta)] dt$$

El t\u00e9rmino $\cos(\delta)$ es constante, y el promedio de $\cos^2(\omega t)$ vale $\frac{1}{2}$. Por otro lado, el promedio de $\cos(\omega t)\text{sen}(\omega t)$ es 0. De modo que:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos(\delta)$$

El t\u00e9rmino $\cos(\delta)$ se denomina **factor de potencia**. En la resonancia, $\delta=0 \Rightarrow \cos(\delta)=1$ y la potencia promedio $\langle P \rangle$ es m\u00e1xima.

Escribiendo la potencia promedio en funci\u00f3n de la frecuencia:

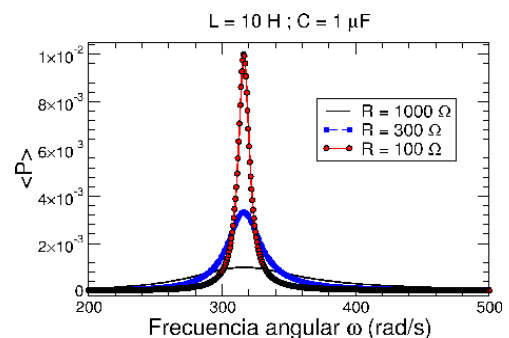
$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{2} V_0 \left(\frac{V_0}{Z} \right) \left(\frac{R}{Z} \right) = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]} \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R}{R^2 + \left[\frac{L}{\omega} \left(\omega^2 - \frac{1}{LC} \right) \right]^2} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R}{\left[R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right]} \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R \omega^2}{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} = \frac{V_{\text{ef}}^2 R \omega^2}{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \end{aligned}$$

Con $\omega = 2\pi f$, $\omega_0 = 2\pi f_0$

$$\langle P \rangle = \frac{V_{\text{ef}}^2 R f^2}{R^2 f^2 + L^2 (f^2 - f_0^2)^2}$$

Puede verse que la potencia transmitida en el punto de resonancia es mucho mayor que para cualquier otra frecuencia.

La **anchura de banda** se define como la diferencia entre frecuencias para las cuales la potencia vale la mitad que su valor m\u00e1ximo:



$$\langle P \rangle_{\text{res}} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R}{R^2} ; \quad \langle P \rangle (\omega') = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R}{Z^2(\omega')} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{V_0^2 R}{R^2} \right)$$

$$Z^2(\omega') = 2R^2 = R^2 + \left(\omega' L - \frac{1}{\omega' C} \right)^2 \Rightarrow R = \left| \omega' L - \frac{1}{\omega' C} \right|$$

Cuando la resonancia es estrecha, $\omega' \cong \omega_0 \pm \Delta\omega$, y la anchura de banda será $2\Delta\omega$.

$$R = \left| (\omega_0 + \Delta\omega) L - \frac{1}{(\omega_0 + \Delta\omega) C} \right| = \left| \omega_0 L + \Delta\omega L - \frac{1}{\omega_0 C} \frac{1}{1 + \Delta\omega/\omega_0} \right|$$

Sustituyendo $\frac{1}{1 + \Delta\omega/\omega_0} \cong \left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)$:

$$R = \left| \omega_0 L + L \Delta\omega - \frac{1}{\omega_0 C} \left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \right| = \left| \omega_0 L + L \Delta\omega - \frac{1}{\omega_0 C} + \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 C} \right|$$

$$= \left| \omega_0 L + L \Delta\omega - \frac{1}{\omega_0 C} + L \Delta\omega \right|$$

$$R \omega_0 C = \left| \omega^2 L C + 2\omega_0 L C \Delta\omega - 1 \right| \Rightarrow 2|\Delta\omega| = \frac{R}{L}$$

El **factor de calidad** Q del circuito se define: $Q = \frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|}$

Por tanto, en ese caso: $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$

También la fase de la corriente varía con la frecuencia: se hace cero en la resonancia y tiene distintos signos a ambos lados de ésta. La velocidad con la que cambia la fase al cruzar la resonancia es tanto mayor cuanto más alto sea el factor de calidad Q del circuito.

